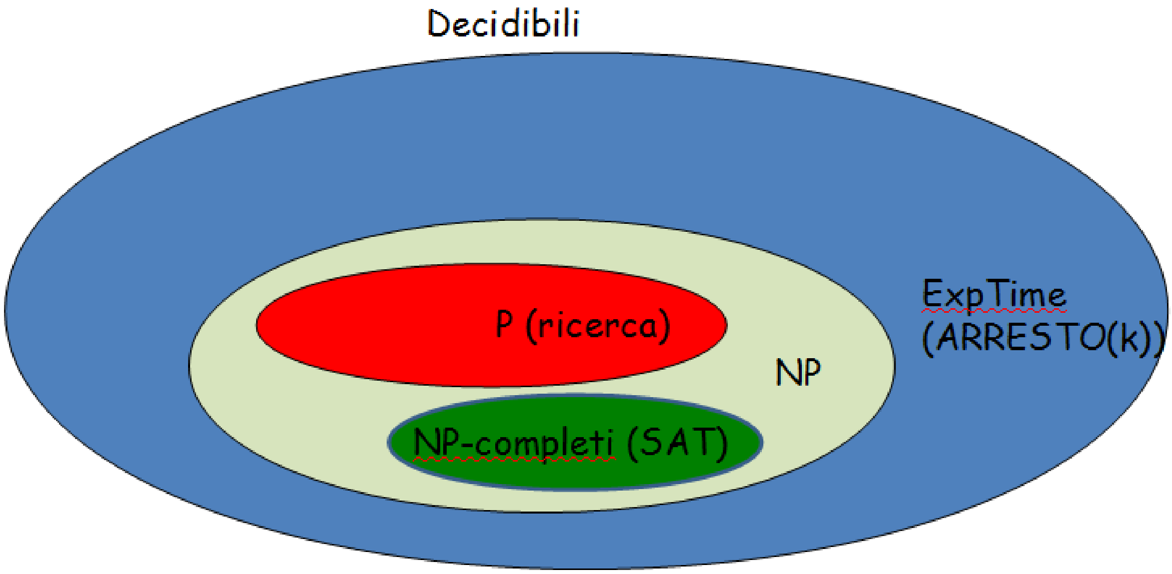
P vs NP

Gerarchia delle classi:



Abbiamo visto che:

- P ⊑ NP ⊑ ExpTime, con P ≠ ExpTime
- In NP c'è una classe molto speciale ed importante di problemi che sicuramente non apparterrebbero a P se fosse NP≠P: i problemi NP-completi;
- Per i problemi in P, che possono essere risolti in tempo polinomiale su una RAM, il compito principale dell'algoritmista è progettare algoritmi efficienti, possibilmente ottimi;
- Anche per i problemi in NP vorremmo progettare algoritmi efficienti, ma c'è un piccolo dettaglio: si congettura (in realtà, si crede fortissimamente) che i problemi NP-completi non ammettano algoritmi risolutivi polinomiali!

P vs NP:

- il problema da un milione di dollari;
- La Fondazione Clay mette in palio 7 premi da un milione di dollari l'uno per la soluzione di quelli che sono considerati i problemi matematici più importanti del nuovo millennio;
- Problemi del millennio:
  - Congettura di Hodge;
  - Congettura di Poincaré (Risolto);
  - Ipotesi di Riemann;
  - Teoria quantistica di Yang-Mills;
  - Equazioni di Navier-Stokes;
  - P vs NP;
  - Congettura di Birch e Swinnerton-Dyerasd.

Crescita polinomiale vs crescita esponenziale:

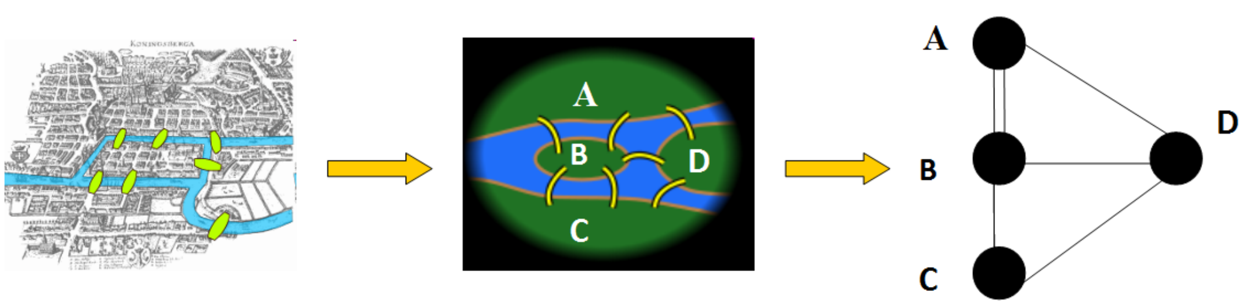
- La differenza fra complessità polinomiale e non polinomiale è davvero enorme;
- Tempi di esecuzione di differenti algorimi per istanze di dimensione crescente su un processore che sa eseguire un milione di istruzioni di alto livello al secondo.
- L'indicazione very long indica che il tempo di calcolo supera 1025 anni.

Table 2.1 The running times (rounded up) of different algorithms on inputs of increasing size, for a processor performing a million high-level instructions per second. In cases where the running time exceeds 10^{25} years, we simply record the algorithm as taking a very long time.

	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	4 sec
$n = 30$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	18 min	10^{25} years
$n = 50$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	11 min	36 years	very long
$n = 100$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	12,892 years	10^{17} years	very long
$n = 1{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	18 min	very long	very long	very long
$n = 10{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	2 min	12 days	very long	very long	very long
$n = 100{,}000$	< 1 sec	2 sec	3 hours	32 years	very long	very long	very long
$n = 1{,}000{,}000$	1 sec	20 sec	12 days	31,710 years	very long	very long	very long

I grafi:

- Nel 1736, il matematico Eulero, affrontò l'annoso problema dei 7 ponti di Königsberg (Prussia)
- È possibile o meno fare una passeggiata che parta da un qualsiasi punto della città e percorra una ed una sola volta ciascuno dei 7 ponti?
- Eulero affrontò il problema schematizzando topologicamente la pianta della città, epurando così l'istanza da insignificanti dettagli topografici;
- …e così Königsberg venne rappresentata con un insieme di 4 punti (uno per ciascuna zona della città), opportunamente uniti da 7 linee (una per ciascun ponte).



Definizione di grafo:

- Un grafo G=(V,E) consiste in:
    - un insieme V={v1,…, vn} di vertici (o nodi);
    - un insieme E={(vi,vj) | vi,vjV} di coppie (non ordinate) di vertici, detti archi.

- Esempio:
  - Grafo di Eulero associato alla città di Königsberg:
    - V={A,B,C,D}
    - E={(A,B), (B,A), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)}
- È più propriamente detto multigrafo, in quanto contiene archi paralleli.